

## 1. Geometrijske primene određenog integrala

### I Površine ravnih likova

Površina  $P$  koja je ograničena neprekidnom funkcijom  $y = f(x) \geq 0$  i odsečcima pravih  $x = a$ ,  $x = b$  i  $y = 0$  određena je formulom  $P = \int_a^b f(x) dx$ .

### II Dužina luka krive

Neka je u ravni data kriva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  i neka su  $f(x)$  i  $f'(x)$  neprekidne na  $[a, b]$ . Dužina luka krive  $y = f(x)$  nad odsečkom  $[a, b]$  je:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

### III Zapremina obrtnog tela

Neka je funkcija  $f(x)$  neprekidna na odsečku  $[a, b]$ . Ako se krivolinijski trapez, čije stranice su odsečak  $[a, b]$  delovi pravih  $x = a$  i  $x = b$  i kriva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , obrće oko  $x$ -ose, dobija se obrtno telo. Zapremina tog tela je:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

### IV Površina obrtnog tela

Neka su funkcije  $f$  i  $f'$  neprekidne na odsečku  $[a, b]$ . Ako se krivolinijski trapez, čije stranice su odsečak  $[a, b]$  delovi pravih  $x = a$  i  $x = b$  i kriva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , obrće oko  $x$ -ose, dobija se obrtno telo. Površina tog tela je:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## 2. Nesvojstveni integral

### Primeri:

1. Izračunati dati nesvojstveni integral ili dokazati da divergira:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (3) \int_0^{+\infty} \cos x dx \quad (4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(5) \int_{-\infty}^0 e^x dx \quad (6) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx \quad (7) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$$

$$(8) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \text{ u zavisnosti od } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Izračunati dati nesvojstveni integral ili dokazati da divergira:

$$(1) \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad (2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad (3) \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad (4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(5) \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} \quad (6) \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \text{ u zavisnosti od } \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Izračunati integrale (u slučaju nesvojstvenog integrala izračunati nesvojstveni integral ili dokazati da divergira):

$$(1) \int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad (2) \int_1^2 x \arctg \frac{2x}{x^2-1} dx \quad (3) \int_0^3 x \ln x dx.$$